**16. Полиномы Чебышева**

Определение 1: Многочленом Чебышева называется функция:  
  
Убедимся, что функция , представленная с помощью тригонометрических функций, на самом деле является многочленом при любом . Непосредственной подстановкой в (1) значений получаем .

Положив , имеем: и так как (по формуле суммы косинусов) , то, значит, справедливо равенство: , которое может быть переписано в виде: (2).

Формула (2) рекуррентно определяет при последовательность функций , начинающуюся с  ; при этом нужно иметь в виду, что здесь, как и в формуле (1) .

Подставляя в (2) заданные начальные члены последовательности , найдем несколько ее последующих членов:

и т.д.

Графики нескольких многочленов Чебышева (с первого по четвертый) изображены на рисунке 1:

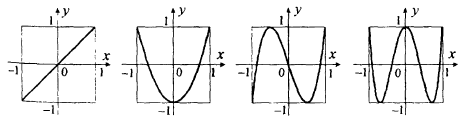


Рис.1. Графики многочленов

Анализ рекуррентной формулы (2) позволяет считать очевидными следующие факты:

1. Все функции , определенные в (1), являются многочленами при любом натуральном n;
2. Степени этих многочленов возрастают с увеличением n, причем старший член многочлена равен .
3. Многочлены при четных n выражаются через степенные функции только четных степеней, при нечетных - только нечетных.

Определение 2: Многочлены, получаемые из делением на старший коэффициент, т.е. , называются нормированными многочленами Чебышева (имеют старший коэффициент 1).

**Свойства многочленов Чебышева:**

1. Многочлен Чебышева ( а значит, и многочлен ) имеет на отрезке ровно n различных действительных корней; все они задаются формулой: , где .
2. Корни многочленов Чебышева перемежаются с точками их наибольших и наименьших значений, равных соответственно 1 и -1 для и и для . А именно, при имеют место экстремумы , в точках .
3. **Теорема Чебышева**: Из всех многочленов степени n со старшим коэффициентом 1 нормированный многочлен Чебышева наименее уклоняется от нуля на отрезке .